# Hacia el diseño de un modelo para el aprendizaje del concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabri para el cálculo de volúmenes

**Luís Albeiro Zabala Jaramillo, Marcela Parraguez González**
Universidad de Medellín, Colombia, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
lzabala@udem.edu.co, marcela.parraguez@ucv.cl

**Resumen**

La propuesta presenta un reporte de los aspectos Histórico-Epistemológico (Martínez y Benoit, 2008) sobre el que se sustenta la construcción del conocimiento matemático del producto vectorial. Como resultado de la indagación, se puede decir que dicho concepto matemático puede ser interpretado como elemento organizador de los sistemas simbólicos cartesianos, así también se puede concebir como un concepto geométrico de volumen (Ricardo, 2012), a partir de las diferentes figuras geométricas que se encuentran al interior del paralelepípedo. Estas dos interpretaciones sustentan construcciones y mecanismos mentales provistas en la Teoría APOE (Arnon et al, 2014) para implementar y diseñar un modelo para el aprendizaje del concepto de los vectores en tres dimensiones, en aprendices del álgebra lineal, mediados con software Cabri (Artigue, 2011).

## Introducción

### Cabri para el cálculo de volúmenes

Al inicio del curso de álgebra lineal se suelen presentar las magnitudes vectoriales, cuando se trata de dar interpretación geométrica a los distintos productos (escalar, vectorial, mixto) que se pueden definir entre vectores de un espacio vectorial. Esto permite medir ángulos, áreas y volúmenes orientados; en particular, el volumen orientado del paralelepípedo que se puede formar a partir de tres vectores linealmente independientes. Por ejemplo, con el software Cabri 3D Vs 2 (Díaz-Barriga, 2006), se identifican las diferentes figuras conexas que se forman al interior de un paralelepípedo, usando diferentes recursos –pinceles oculares– que el programa permite al usuario: cortes transversales, pirámides y troncos de pirámides -2D-, esferas tangentes a las paredes del paralelepípedo si su base es cuadrada, o sólo tangentes a dos caras si las bases no son cuadradas o rómbicas -3D-, entre otras figuras que se forman al interior de éstas.

## Marco teórico

Se hizo uso de la teoría APOE como sustento teórico para interpretar las construcciones mentales de los estudiantes, necesarias para construir el esquema del concepto geométrico de volumen como una de las aplicaciones del producto mixto de vectores en 3D en sus tres interpretaciones geométricas, longitudes, áreas y volúmenes, asociadas a los distintos productos –escalar, vectorial, mixto–. Además, se incluyó el Software Cabri en nuestro estudio, el cual sustenta las actividades que son parte de una aproximación pedagógica particular en el llamado ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Aprendizaje Colaborativo, Ejercicios).

**Marco teórico**

Se hizo uso de la teoría APOE como sustento teórico para interpretar las construcciones mentales de los estudiantes, necesarias para construir el esquema del concepto geométrico de volumen como una de las aplicaciones del producto mixto de vectores en 3D en sus tres interpretaciones geométricas, longitudes, áreas y volúmenes, asociadas a los distintos productos –escalar, vectorial, mixto–. Además, se incluyó el Software Cabri en nuestro estudio, el cual sustenta las actividades que son parte de una aproximación pedagógica particular en el llamado ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Aprendizaje Colaborativo, Ejercicios).

**La Teoría APOE**

Teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema), creada por Ed Dubinsky (1991) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community); actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) quienes presentan los elementos de la teoría y su uso para las investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky fundamenta la problemática en el interés por la descripción de las construcciones de esquemas mentales que los estudiantes puedan realizar para aprender conceptos, desde la propia matemática, donde un estudiante no lograría internalizar conceptos matemáticos directamente, sino que necesita estructuras mentales adecuadas, que en caso de no poseerlas será casi imposible aprender cualquier concepto matemático. Las estructuras para cada concepto necesitan conectarse con otras previas.

Dubinsky (1991) propone desde la teoría APOE las estructuras mentales necesarias para construir un concepto: Acción (se realizan al interior del alumno: se hace paso a paso y obedecen a estímulos que son y perciben como externos), Proceso (sin realizar cada paso, el alumno puede imaginar lo que hay qué hacer, para revertir y coordinar en nuevos procesos), Objeto (el alumno puede trabajar –un fragmento matemático con ellas como un todo–), Esquema (es una colección de acciones, procesos y objetos que están coherentemente dispuestos en la mente del estudiante, de tal forma que la coherencia es la herramienta mental con la cual el estudiante se apoya en este recurso para resolver la situación matemática que se le está presentando).

En APOE los mecanismos mentales para construir dichas estructuras son las reflexiones abstractas: La interiorización (cuando el alumno reflexiona sobre la repetición de una acción determinada y está alejada de influencias externas), la coordinación (se da mediante procesos múltiples relacionados de los cuales surgen nuevos procesos), la reversión (puede mirar un nuevo proceso en donde puede analizar cómo fue concebido el proceso inicial), la encapsulación y desencapsulación (cuando ha reflexionado sobre un proceso y con una acción lo ha transformado, se puede decir que se ha convertido en un objeto, desencapsulándolo para analizarlo bajo un nuevo proceso).

### Diseño metodológico

Se analizaron los procesos mentales que muestran los alumnos al relacionar el concepto geométrico de volúmenes con vectores en tres dimensiones. Se detallan los mecanismos y las construcciones que los estudiantes realizaron con la asistencia de la tecnología (Cabri) y de qué forma estos se apropiaron de los conceptos del Álgebra Lineal; por lo que usamos la teoría APOE.

### Estudio de Casos Múltiples

Se aplicó con estudiantes de ingeniería colombianos, del segundo año de universidad

### Ciclo de investigación de APOE

A los casos de estudio se les aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE: un análisis teórico, conocido como Descomposición Genética, (DG); un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996); y a partir del análisis de los datos obtenidos, se le puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos.

### Análisis Histórico–Epistemológico

Se hizo un estudio tanto histórico como epistemológico, pretendiendo mantener la conceptualización o distinción que hace Bachelard (1972) entre el trabajo del historiador de la ciencia y el del epistemólogo: "El historiador de la ciencia debe tomar las ideas como hechos. El epistemólogo debe tomar los hechos como ideas, insertándolas en un sistema de pensamientos". (Bachelard, 1972, p 20). Se vio un enfoque en el Producto Exterior de Grassmann y su representación geométrica de los trabajos realizados por los estudiantes en los casos de estudio y la forma cómo calculan el volumen de un paralelepípedo.

### Del Producto Vectorial

La primera parte del análisis Histórico – Epistemológico (Martínez y Benoit, 2008) permite dar cuenta de tres etapas que históricamente corresponden a una epistemología del producto vectorial: a) Nacimiento de los Cuaterniones, b) Desarrollo y Maduración del Cálculo de Cuaterniones, c) Evolución del Cuaternión al Cálculo Vectorial Moderno

### Del Concepto de Volumen

La segunda parte del elemento Histórico – Epistemológico del concepto de medida se remonta a más de 5000 años, que emerge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes fundamentalmente y de la necesidad de su cálculo. Estos tres aspectos particulares de medidas son los que han servido como guía para sacar a la luz el concepto matemático de medida que de por sí están unidos.

### Del Producto Exterior

Grassmann (1809 –1877) un matemático incomprendido y un lingüista reconocido, al igual que Hamilton, un año después del descubrimiento de la multiplicación correcta de los cuaterniones por Hamilton (1844), éste publica unas ideas parecidas en su tratado titulado "Die linealeAusdehnungslehre; einNeuerZweig der Mathematik" –Teoría de la Extensión Lineal; una Nueva Rama de la Matemática–. Grassmann fue el primero en concebir la geometría de varias dimensiones, una de sus obras más importantes fue "Enseñanza de la Dilatación" (1862), donde desarrolló un cálculo operativo para las diversas magnitudes geométricas, posteriormente definió también el "Producto Exterior", operación clave en el álgebra conocida como "Álgebra Externa".

## Su Representación Algebraica

El aporte esencial de Grassmann al producto vectorial fue una generalización, guiándose por su intuición geométrica: Él concibió el área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada dotada de una orientación, y por lo tanto, de un signo, según se recorriera el perímetro del área en un sentido u otro. Con esto, definió un nuevo producto, el producto que en la actualidad se llama producto exterior, $[ab] = ab = a \wedge b$ y que él llamaba producto escalón, íntimamente relacionado con el producto vectorial, y que, empero, a diferencia de éste, no está restringido a una dimensionalidad fija como en el caso del producto vectorial. (González, nd, p. 10)

## Definición del Producto Exterior

En matemáticas la definición del producto exterior –o como se conocía anteriormente producto cuña o escalón–, es una anti-simetrización del producto tensorial, o como mejor definición que es de cualquier número de vectores como su producto antisimétrico, es decir, el único producto distributivo respecto a la suma de vectores que cambia de signo bajo cualquier permutación de un par de ellos:

$$v_1 \wedge \cdots v_i \wedge \cdots v_j \wedge \cdots v_n \wedge = -v_1 \wedge \cdots v_j \wedge \cdots v_i \wedge \cdots v_n \quad \forall\, i \neq j$$

Esta definición del producto exterior -$[ab] = ab = a \wedge b$ – es única, salvo un factor constante. Para ello se identifica el producto exterior de vectores perpendiculares con el producto de sus módulos para una constante igual a 1.

## Su Representación Geométrica en 3D.

Para la representación geométrica en 3D "cada producto exterior por un nuevo vector es una multiplicación por su componente perpendicular al espacio generado por los vectores", (González, 2012, p. 44). Dados tres vectores {u, v, w} cualesquiera e independientes en el espacio euclídeo –de la forma como fue concebida por Grassmann para analizar la forma del cómo los aprendices realizan la construcción del paralelepípedo– se observa el producto exterior y la forma geométrica:

> El producto exterior del primero por el segundo es igual a la longitud del primero por la componente perpendicular del segundo respecto al primero (figura 1), es decir, el área del paralelogramo que forman:
>
> $$u \wedge u = uv_{\perp u}$$
>
> Ahora multipliquémoslo exteriormente por el tercero y obtendremos el producto del área del paralelogramo que forman los dos

primeros por la componente perpendicular del tercero respecto al plano formado por los dos primeros. Eso es igual al área de la base por la altura, es decir, el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores (figura 2):

$$u \wedge u \wedge w = u v_{\perp u} w_{\perp uv}$$

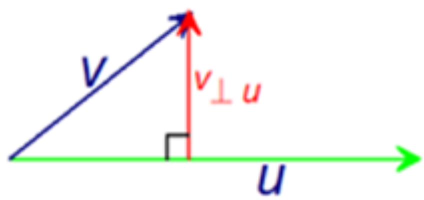


**Figura 1**

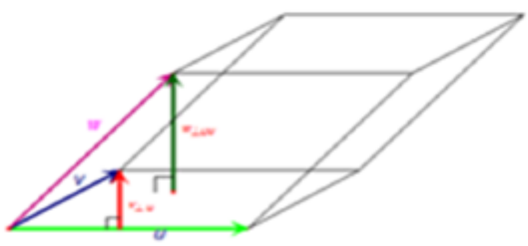

**Figura 2**

De ahí el nombre que le dio Grassmann: producto exterior ya que siempre da como resultado un aumento de dimensión geométrica respecto a la dimensión geométrica del recinto anterior. El título de su obra Die Ausdehnungslehre fue traducido muy acertadamente al español como Teoría de la extensión. (González, 2012, p. 44)

**Articulación de la Teoría APOE, el Producto Exterior y Cabri desde los Casos de Estudio**

**Acción:**

**Del concepto matemático del producto mixto:** Dadas las fórmulas para las operaciones entre vectores, el estudiante puede determinar las operaciones de estos, en particular con sus respectivas componentes y direcciones.

ESTUDIANTE "B": ACCIONES MECÁNICAS

Ya poseía los 3 vectores en el espacio, por lo tanto solucioné una gran parte del reto que se me había propuesto, pero ahora lo que tenía que hacer era encontrar la forma de que esos vectores me construyeran una figura en particular, era necesario tener presente cuáles eran las cualidades de un paralelepípedo, recordaba que matemáticamente el volumen era el triple producto mixto de los vectores, pero gráficamente no lo tenía relacionado, recordé en qué consistía el producto mixto, el cual era un producto cruz, y con este resultado se realizaba un producto escalar con el vector faltante

**Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior:** (Grassmann): Dados los vectores, el estudiante puede encontrar las formas de representación de estos en un espacio, en particular con sus respectivas componentes y direcciones.

ESTUDIANTE "C": ACCIONES EN VÍAS DE INTERIORIZARSE EN LA CONSTRUCCIÓN PROCESO DEL CONCEPTO VECTOR EN EL ESPACIO

Pensé en unir las dimensiones en X y Y en el plano XY para esto tracé rectas paralelas a los vectores que Cabri presenta como ejes y trasladé los valores al eje X y al eje Y para luego trazar rectas paralelas en los puntos contrarios, es decir, en el punto del eje X tracé una recta paralela al eje Y y viceversa.

Luego donde se unían estas dos rectas tracé punto de intersección y se subió las unidades correspondientes en el eje Z, como resultado es un punto opuesto al punto (0,0,0) origen, es decir, el punto que buscaba es la punta opuesta de un prisma con una punta en el origen y el vector es una diagonal del prisma con cola en (0,0,0) y cabeza en un punto (x, y, z) hallado de la forma ya explicada

**Proceso:**

**Del concepto matemático sobre el producto mixto:** Capacidad de describir algunos aspectos de la gráfica de la operación de tres vectores –operándolos indistintamente–, sin obtener directamente valores específicos.

**Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior** (Grassmann): Capacidad del estudiante de describir algunos aspectos de la gráfica en la representación de los tres vectores -operándolos indistintamente, con proyecciones-. Además, es capaz de hacer transformaciones al objeto matemático de manera interna, incluso de pensar en los posibles poliedros al interior de la gráfica.

ESTUDIANTE "B": PROCESOS COMO RESULTADO DE INTERIORIZAR ACCIONES, GRASSMANN

Cada cara era un paralelogramo y es un prisma donde su base es un paralelogramo, estas fueron las que más me ayudó a realizar la construcción ya que únicamente era determinar la base y una altura para la figura, donde concluí que dos vectores me podían determinar una base con forma de paralelogramo y el tercer vector seria la altura.

Entonces ya poseía una forma de que los 3 vectores me determinaran el paralelepípedo.

**Objeto:**

**Del concepto matemático sobre el producto mixto:** El estudiante puede hacer acciones en el objeto de la gráfica resultante del producto mixto a partir de la proyección de estos en el espacio 3D.
Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior (Grassmann) : El estudiante puede discernir sobre la gráfica resultante del producto mixto a partir de la proyección de estos en el espacio 3D y verificar las diferentes figuras que se forman al interior de esta.

ESTUDIANTE "B": TRATA DE HACER ACCIONES SOBRE UN OBJETO

Intenté realizarle unas transformaciones al ejercicio, por ejemplo, que los puntos se encuentren en el mismo plano, en este caso la figura no tendría una altura, logrando que se formara una figura plana.

**Esquema:**

**Del concepto matemático sobre el producto mixto:** Un estudiante puede ordenar, clasificar, categorizar y aplicar las propiedades resultantes del producto mixto en el espacio 3D y las representaciones geométricas de los vectores en este espacio.

**Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior** (Grassmann): Un estudiante puede graficar y clasificar en forma de categorías y aplicar las propiedades resultantes del producto mixto en el espacio 3D.

ESTUDIANTE "B": TEMATIZA EL ESQUEMA EN OBJETO

La cantidad de figuras resultantes en el producto del producto mixto fueron demasiadas, primero porque entre dos vectores sería posible formar un plano, y en este plano sería fácil visualizar cualquier figura plana (círculos, cuadrados, triángulos, robos, trapecios, etc.), y si se le diera una altura a partir del otro vector formaría un prisma que sería acorde a la figura de la base. Entre estos resalté el cilindro, aunque su base no tenía lados se cumplía el mismo principio.

## Conclusiones

Se han presentado los resultados del estudio realizado para indagar sobre los aspectos históricos – epistemológicos del producto vectorial, del concepto de volumen y del producto exterior. Con esta indagación se pretendió desglosar y observar cómo fue surgiendo no sólo el concepto de producto vectorial, sino de la forma cómo se construye el concepto de volumen y en especial en la tercera parte que es donde se observa del cómo los estudiantes "ven" o mejor se imaginan los pasos para la construcción geométrica del paralelepípedo que estos tres vectores forman, y en el producto exterior se encuentran las explicaciones a las construcciones que éstos hacen.

## *Referencias*

*Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.*

*Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 6. Número 8. pp 13-33. Costa Rica.*

*Bachelard, G. (1972). La formación del espíritu científico. (p 20), Buenos Aires: Siglo XI. (Original en francés de 1938).*

*Díaz-Barriga, E. (2006). Geometría dinámica con Cabri-Géomètre. México: Editorial Kali.*

*Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): Advanced mathematical thinking (pp. 95-123). Dordrecht. Kluwer A. P.*

*González, J. (nd). El producto vectorial. Recuperado el 02 de julio de 2014 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/realquiler/fich/jfgh.pdf*

*González, R. (2012). Producto exterior y sus aplicaciones. Recuperado el 02 de julio de 2014 de http://www.xtec.cat/~rgonzal1/espacio.htm y de http://www.xtec.cat/~rgonzal1/espacio04.pdf*

*Martínez, G. y Benoit, P. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. Latin American Journal of PhysicsEducation, 2(2), 122-129.*

*Ricardo, F. (2012). Apuntes de la Teoría de la Medida. Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura. España.*